C. F. Manara

BOZZA DI UNA RIFLESSIONE SUL CONCETTO DI ANGOLO.

1 - Il concetto espresso dal termine “angolo” nasce ovviamente da una grande varietà di esperienze concrete e quotidiane. Da questa varietà di esperienze di partenza consegue il fatto che il termine acquisti molti significati, distinti e spesso abbastanza diversi loro; e che risulti difficile precisare in un solo modo il significato del termine; e consegue infine che sia difficile stabilire dei collegamenti facili e chiari tra le varie teorizzazioni e precisazioni che si possono dare. D'altra parte non appare prudente scegliere una tra le possibili teorizzazioni, ed escludere le altre, perché ciò condurrebbe a difficoltà nell'impiego pratico del concetto e delle sue conseguenze; ed anche potrebbe indurre confusione in alcuni soggetti.

2 - Dalle analisi delle esperienze quotidiane e delle loro verbalizzazioni (o rappresentazioni linguistiche, che dir si voglia) si possono identificare varie accezioni del termine "angolo".

a) Una prima accezione del termine fa riferimento ad un sottoinsieme di piano, limitato da due semirette aventi una comune origine. È noto che le due semirette vengono abitualmente chiamate "lati" dell'angolo, e la loro comune origine viene chiamata" vertice" dell'angolo. È da osservarsi che questa porzione di piano in linea di principio è illimitata, ma viene quasi sempre immaginata come limitata, così come è di solito la nostra esperienza concreta.

Spesso addirittura le espressioni linguistiche, parlando di "angolo", fanno riferimento ad un insieme di punti dello spazio, compreso tra due semipiani che hanno una retta come origine comune; tale porzione di spazio dovrebbe essere chiamata più precisamente "angolo diedro", ma viene indicata sbrigativamente col termine "angolo", come si può constatare dalle abitudini quotidiane diffuse.

Si rifletta sulle frasi seguenti: "*Chiudi l'ombrello e mettilo nell'angolo*". Ovviamente l'ombrello è un oggetto solido, tridimensionale; ma nell'immaginazione di colui che parla pare che sia prevalente la regione di pavimento (e quindi di un piano) in cui la punta dell'ombrello deve essere posta. Ma si consideri per esempio la frase seguente: "*I ragni fanno la loro tela nell'angolo tra due pareti.*" In questo caso pare che si possa dire che il termine “angolo” vuole indicare la regione spaziale (quindi un diedro) limitata dalle due pareti.

Comunque sia, negli esempi citati si intende indicare una regione (del piano o dello spazio) nel cui interno si immagina di operare; cioè quello che si potrebbe chiamare anche un "angolo (piano o spaziale) rientrante”.

Ma si consideri per esempio la frase seguente: "*Il ladruncolo prese la corsa e sparì dietro l'angolo della casa”.* In questo caso si può dire che il termine indica un angolo che viene considerato come “sporgente”, ossia come un “saliente” dell'edificio a cui si accenna, e colui che parla viene immaginato al di fuori dell'edificio stesso; ovviamente, anche in questo caso, si dovrebbe parlare più precisamente di "diedro"; ma è facile osservare che l'espressione più geometricamente precisa non sarebbe compresa dall'ascoltatore comune.

Quindi nel primo caso l'osservatore è immaginato nella regione angolare che viene chiamata "angolo convesso", mentre nel secondo caso l'osservatore viene immaginato nella regione che oggi si suol chiamare "dell'angolo concavo".

3 - b) Una seconda accezione del termine "angolo" fa riferimento alla mutua posizione di due semirette che hanno l'origine in comune. È questo l'atteggiamento che si incontra in Euclide, che scrive: "Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee <rette> su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciano in linea retta" [Cfr. per es. GLI ELEMENTI di Euclide a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni. Torino (UTET), 1970. Libro I. Definizioni. VIII (pag.67)].

I commentatori osservano (giustamente) che, a rigore, questa frase non si può chiamare una definizione, perché rimanda il chiarimento del significato del termine "angolo" alla comprensione del termine "inclinazione", supposto noto.

Il termine "angolo" in questo secondo senso viene impiegato in molti casi: si consideri per esempio la frase seguente: " *Le due strade si incontrano ad angolo retto*". Oppure: "*Il triangolo equilatero ha tutti i suoi angoli uguali tra loro*".

Pare quindi che si possa dire che in questa seconda accezione il termine "angolo" viene riferito alla coppia di semirette aventi l'origine in comune, piuttosto che alla regione piana che ha tali semirette come confine (bordo). Tuttavia l'immagine di una regione cosiffatta non è totalmente assente, ma viene spesso vista non soltanto come insieme di punti del piano, ma come insieme di semirette aventi tutte la stessa origine, e comprese tra due semirette limitanti, che vengono chiamate "lati" dell'angolo; l'oggetto che viene più spesso richiamato da questa immagine è il ventaglio. Ma l'immagine delle stecche del ventaglio sussiste spesso insieme con quella data dall'insieme di punti del piano, ed aiuta a costruire i concetti di "angolo convesso" e di "angolo concavo", che vengono utilizzati nella teorizzazione.

4 - In questa seconda accezione l'angolo viene trattato come una specie di grandezza; alcuni Autori addirittura enumerano gli angoli tra le grandezze. A questo punto della nostra riflessione non è possibile dare un giudizio sulla validità di questo atteggiamento: infatti un giudizio cosiffatto dipenderebbe dalla scelta di una teoria completa e rigorosa delle grandezze, che qui finora non abbiamo dato. Ritorneremo presto su questo argomento; qui ci limitiamo ad osservare che spesso, a questo punto dello sviluppo della teoria, in molte trattazioni vengono introdotte delle operazioni sugli angoli. Ma queste trattazioni richiedono che il concetto, nato dalle immagini suscitate in noi dalle esperienze elementari, venga ampliato con opportune convenzioni. Ricordiamo infatti che nella frase di Euclide citata all'inizio del N.3 è menzionata una clausola limitativa; infatti ivi si parla di " ...due linee rette <...> le quali si incontrino <...> e non giacciano sulla stessa retta". Poiché noi abbiamo parlato di semirette con una origine comune, la clausola limitativa or ora ricordata significa per noi che i lati dell'angolo che consideriamo non debbano essere le due semirette che giacciono su una medesima retta, e sono separate dalla comune origine. Tuttavia gli sviluppi successivi suggeriscono l'opportunità di estendere convenzionalmente il concetto di angolo, lasciando cadere la clausola limitativa enunciata nel trattato euclideo, ed ammettendo che anche due semirette aventi l'origine comune ed appartenenti ad una medesima retta possano essere considerate come i lati di un angolo; si tratterà di un angolo speciale, del quale non si vede immediatamente il vertice, e che riceverà il nome speciale di "angolo piatto".

OSSERVAZIONE 1 - L'angolo speciale, ora introdotto convenzionalmente, non risponde all'immagine dell'esperienza abituale, dalla quale la nostra mente parte per costruire il concetto di angolo: infatti fa parte della esperienza citata la percezione di un punto particolare, che, come è noto, viene chiamato "vertice" dell'angolo. Nell'angolo piatto tale vertice non "si vede", e deve essere immaginato esistente al di là della nostra sensazione immediata.

Tuttavia l'operazione logica che si compie è molto comune in matematica: si pensi per es. alla introduzione convenzionale del concetto di insieme vuoto e corrispondentemente dello zero tra i numeri naturali: se accettiamo che questi nascano dall'operazione di contare gli elementi di un insieme finito, appare chiaro che nell'insieme vuoto tali elementi non esistono, e quindi l'operazione di contare i suoi elementi non ha senso, ed in particolare non può dar luogo ad alcun numero naturale. Tuttavia si adotta la convenzione di dare cittadinanza allo zero, e di considerarlo come un numero; convenzione che permette, come è noto, fondamentali sviluppi nella matematica.

Un’ulteriore estensione del concetto di "angolo" avviene accettando che le due semirette aventi una comune origine, che vengono chiamate "lati" dell'angolo, siano addirittura sovrapposte: in questo caso la regione del piano che si considera coincide addirittura con l'intero piano; è noto che l'angolo speciale che si considera in questo caso viene chiamato "angolo giro"; il nome deriva molto probabilmente dalle immagini cinematiche che formano l'argomento della trattazione che seguirà. [Fine dell'Osservazione]

5 - Prima di proseguire, ricordiamo brevemente i punti fondamentali del concetto elementare di grandezza; questa sommaria rassegna non sarà una trattazione esauriente, ma ha il solo scopo di giustificare le osservazioni che faremo, riattaccandoci a ciò che è stato detto nel paragrafo precedente.

In generale si suol chiamare "classe di grandezze omogenee" un insieme di enti per i quali sia possibile istituire una trattazione teorica che contempli:

I) la possibilità di stabilire e di verificare il sussistere di una relazione tra due enti della classe che sia riflessiva, simmetrica e transitiva; tale relazione viene spesso chiamata "equivalenza" o anche sbrigativamente "uguaglianza"; si pensi per esempio ai pesi dei corpi, oppure alle lunghezze dei segmenti rettilinei. Le operazioni concrete da eseguire per verificare il sussistere della relazione in parola possono essere le più diverse, dipendentemente dalla classe di enti considerata: per esempio nel caso dei pesi dei corpi è possibile utilizzare uno strumento materiale comunemente chiamato "bilancia"; nel caso delle lunghezze dei segmenti rettilinei si può immaginare di eseguire un’operazione di trasporto rigido.

II) La possibilità di definire e di eseguire una operazione di composizione interna, che viene abitualmente chiamata "somma", avente le note proprietà formali "commutativa" ed "associativa". Anche in relazione all’esecuzione concreta di questa operazione è noto che le modalità possono essere le più varie, dipendentemente dalla natura degli enti che si considerano. Non ci soffermiamo su questo argomento ben noto, e ci limitiamo a ricordare che su questa operazione di composizione, e sulle sue proprietà si fonda il concetto di "multiplo di una grandezza secondo un numero naturale", e si fonda anche la possibilità di istituire in una classe di grandezze una relazione di ordine totale. Queste due circostanze sono pure essenziali per poter definire l'operazione di misura, la quale fonda la possibilità di rappresentare con numeri una parte importante della realtà materiale.

III) La proprietà espressa dalla proposizione che viene comunemente ricordata come "Postulato di Archimede". Secondo questa proposizione, considerate due grandezze omogenee A e B, e supponendo che A sia minore di B (nell'ordinamento or ora ricordato), è possibile trovare un multiplo della minore che superi B.

6 - Possiamo ora riflettere sulle esperienze che ci conducono a costruire il concetto di angolo, nella prima e soprattutto nella seconda accezione che abbiamo considerato finora, in particolare nel N.3. In questo ordine di idee si potrebbe dire che l'esperienza comune e quotidiana ci conduce senza difficoltà ad accettare che sia valida la condizione indicata sub I) nel n. precedente; a questo proposito basterebbe fare appello all'operazione di trasporto rigido così come la immaginazione che ce la presenta, a partire dalle manipolazioni eseguite sugli oggetti. Si suol dire che due angoli, i quali possono essere trasportati a coincidere con un movimento rigido, "hanno la stessa ampiezza". Si introduce così un nuovo concetto: quello di "ampiezza" di un angolo.

Passiamo ora a riflettere sulla operazione di "somma" di cui si parla sub II). A questo proposito conviene introdurre un simbolismo che, per quanto rudimentale, permetterà di rendere più agile il discorso. Pertanto conveniamo di indicare con lettere latine minuscole: a, b, c,....certe semirette che hanno tutte la loro origine comune in un medesimo punto o; e conveniamo di indicare con i simboli:

(1) $< a,b >;\ < b,\ c >;\ < a,c >$

gli angoli, intesi nella accezione b) presentata nel N.3, che hanno come lati le semirette indicate.

Supponiamo che tutti e tre gli angoli (1) siano convessi; e supponiamo inoltre che la semiretta b appartenga alla regione convessa dell'angolo $< a,c >$. Allora si suole descrivere simbolicamente tale situazione scrivendo:

(2) $< a,c > = < a,b > \ + < b,c >$.

La formula (2) viene di solito considerata come una simbolizzazione dell'operazione che viene chiamata "somma [convessa] di angoli [convessi]"; operazione che viene descritta come se fosse eseguita trasportando rigidamente la coppia di semirette $< b,c >$ in modo che abbia la stessa origine della coppia $< a,\ b >$ ed in modo che le semirette a e c stiano da parti opposte del piano rispetto alla retta cui appartiene la b.

Appare chiaro dall'esperienza che l'operazione indicata dalla (2) possiede le proprietà commutativa ed associativa; e ciò giustifica il fatto che l'operazione stessa sia richiamata col nome di "somma" degli angoli.

Da questa denominazione discende facilmente l'osservazione dell'esistenza di "angoli adiacenti", definiti come quelli che hanno per somma un angolo piatto. E pure facilmente discende la definizione di "angolo retto", definito come quello che è uguale al suo adiacente. Tutto questo si trova già in Euclide [si veda per esempio l'opera citata sopra al N.3, alla pagina 67]. Questi concetti sono stati utilizzati da Euclide; si consideri per esempio la nota Proposizione 32, la quale dimostra che "In ogni triangolo [...] la somma degli angoli interni è uguale a due retti" [si veda l'opera citata nel N.3, pag.125].

Ancora dalla denominazione di "somma", data all'operazione simbolizzata dalla (2), discende il concetto di "multiplo" di un dato angolo. E da questo concetto discende poi l'insieme di operazioni che conducono alla formazione del concetto di "misura di un angolo".

A questo risultato si giunge abitualmente anche seguendo un altro cammino: precisamente, una volta introdotto l'angolo retto, si immagina di poterlo concepire come multiplo di un certo angolo elementare. La tradizione, ancora oggi seguita, adotta la novantesima parte dell'angolo retto come sottomultiplo privilegiato di questo; sottomultiplo la cui ampiezza viene assunta come unità di misura dell'ampiezza degli angoli, rispetto all'operazione di "somma"; tale unità di misura delle ampiezze angolari viene chiamata, come è noto, "grado"; spesso si aggiunge l'aggettivo "sessagesimale" , perché ci fu in passato un tentativo di razionalizzare questa misura, scegliendo come sottomultiplo privilegiato dell'angolo retto la centesima parte di questo, chiamata "grado centesimale". Ma la tradizione non è stata vinta completamente; e quindi oggi sussistono entrambe le convenzioni di misura, e il tentativo di razionalizzare certe operazioni ha avuto come risultato il rendere le cose più complicate di prima. Il che accade abbastanza spesso.

È noto che con le convenzioni sessagesimali la misura dell'angolo piatto è 180 gradi, e quella dell'angolo giro è 360 gradi. È pure noto che il grado sessagesimale viene suddiviso tradizionalmente in 60 sottomultipli, chiamati "minuti primi" ed ognuno di questi viene ulteriormente suddiviso in 60 sottomultipli, chiamati "minuti secondi". In definitiva quindi l'angolo retto viene suddiviso in $90 \times 60 \times 60 \ = \ 324000$ sottomultipli. Questi vengono utilizzati in varie questioni teoriche e pratiche, per esempio in Topografia ed in Astronomia.

OSSERVAZIONE 2 - L'angolo retto è una figura facilmente costruibile, che ha una posizione privilegiata nella geometria tradizionale. Cose analoghe si possono dire della relazione (simmetrica) che intercede tra due rette incidenti, appartenenti allo stesso piano, che formano angoli tutti uguali tra loro, e perciò retti.

Come è noto, tale relazione viene chiamata "relazione di perpendicolarità" (tra coppie di rette). Negli "ELEMENTI" di Euclide, un apposito Postulato (il IV) afferma che tutti gli angoli retti sono uguali tra loro [Cfr. l'opera citata nel N.3, alla pag. 71).

La costruzione di un angolo retto con strumenti elementari (riga e compasso) è una delle prime questioni risolte nel trattato euclideo; tuttavia si dimostra che la costruzione di un sottomultiplo dell'angolo retto secondo un numero naturale qualunque [in particolare la costruzione dell'angolo che ha come ampiezza il grado sessagesimale o centesimale] non è un'operazione eseguibile con strumenti elementari. Pertanto l'esistenza di tali sottomultipli viene abitualmente accettata sulla base di una specie di "intuizione", o in forza di una dimostrazione rigorosa, la quale tuttavia richiede strumenti logici che esulano da queste note. [Fine dell'osservazione].

È immediato osservare che la costruzione reiterata di multipli di un medesimo angolo convesso (per quanto esso ci appaia per così dire "piccolo") può condurre ad un angolo che non è più convesso; pertanto si potrebbe dire che in questo caso l'operazione di "somma" non risulta più essere un’operazione di composizione interna, rispetto all'insieme degli angoli convessi, perché può avvenire che la "somma" di due angoli convessi non sia più un angolo convesso. Inoltre, qualora si prosegua nell'operazione di costruire multipli, si può giungere addirittura all'angolo giro, oppure ad un angolo che è minore di quello elementare di partenza. Ciò basta per poter concludere che l'angolo non soddisfa alla proprietà III), enunciata con il cosiddetto Postulato di Archimede nel N.5.

Quindi, se si accetta di chiamare “grandezze” soltanto gli enti caratterizzati anche dal Postulato di Archimede, appare chiaro che gli angoli dovrebbero essere qualificati come "grandezze sui generis" o “pseudograndezze” o "grandezze speciali", o con altri nomi che mettano in evidenza il fatto che essi non rientrano a pieno titolo nel concetto elementare ed abituale di grandezza.

Di fatto ciò non avviene, forse anche perché, quando si applicano questi concetti in geometria elementare, si accetta quasi automaticamente che gli angoli su cui si opera siano convessi, o al massimo siano piatti, come avviene nel caso della proposizione 32 di Euclide, citata sopra. Questa ipotesi, considerata "naturale" ed adottata in forza di una pretesa "evidenza", maschera le difficoltà relative alla trattazione rigorosa del concetto di angolo, e forse giustifica la enumerazione degli angoli tra le grandezze.

7 - c) Una terza accezione del concetto di angolo nasce da esperienze diverse da quelle finora richiamate, e fa riferimento a concetti che da una parte sono più strettamente contigui alla geometria delle trasformazioni, ma che d'altra parte richiedono la considerazione di operazioni che si svolgono nel tempo; e quindi escono spesso dalle circostanze puramente geometriche per entrare nel capitolo della meccanica che viene chiamato “cinematica”, cioè studio del movimento dei corpi.

Questi modi di pensare sono giustificati da molte esperienze quotidiane elementari: infatti a tutti capita di vedere girare una ruota attorno al proprio asse, o una porta attorno ai propri cardini; ed a tutti capita di constatare che le lancette dell'orologio girano continuamente attorno ad un perno. In particolare la lancetta dei minuti (quella tradizionalmente più lunga) ripassa 24 volte al giorno sulla stessa posizione del quadrante. Quando ci si pone da questo punto di vista le due semirette con origine comune, che sono i lati dell'angolo nel senso presentato in b), sono viste come posizione di partenza e posizione di arrivo di una semiretta mobile nel tempo; oppure la semiretta di arrivo viene considerata come ottenuta applicando alla semiretta di partenza un’operazione, che viene chiamata "rotazione", ed è vista come una trasformazione dell'intero piano su se stesso che è un movimento rigido, il quale lascia fermo un punto del piano, chiamato talvolta "centro di rotazione".

Tuttavia, in questo ordine di idee, si constata che esistono delle operazioni effettive, e precisamente le rotazioni di un angolo giro, che fanno coincidere ogni semiretta di partenza con quella di arrivo. Consegue di qui che, quando si assegnino le due semirette, di partenza e di arrivo, non è univocamente determinato un movimento rigido di rotazione che porta l'una sull'altra; anzi vi sono infiniti movimenti che fanno ottenere questo risultato, e due di essi differiscono per un multiplo della rotazione dell'angolo giro.

Quindi, se si considera la sola posizione delle due semirette, non è possibile assegnare un’unica misura del loro angolo; se invece si invoca anche la memoria cioè si immerge il fatto geometrico

nel tempo (che a rigore non lo riguarda), è possibile per così dire "sgomitolare" o "dipanare" il movimento, facendolo così rientrando nella classe delle grandezze abituali. Per esempio si consideri la lancetta dei minuti (quella lunga) di un orologio da polso, e si supponga che sia lunga 1cm. Indicando con il simbolo π la costante di Archimede (pigreco), cioè ponendo:
π = 3,141592658 ... , si ha che dopo un anno l'estremità della lancetta avrà percorso un cammino lungo: $2\pi \times 365 \times 24\ cm\ =\ 55040{,}70326\ cm$, cioè più di mezzo chilometro.

Ma in questo modo, naturalmente, se l'estremità della lancetta passa su un certo punto del quadrante e poi vi ripassa una seconda volta dopo aver fatto un giro, gli angoli corrispondenti vengono considerati diversi, anche se le due posizioni sono geometricamente indistinguibili.

Si aggiunga inoltre che, considerando le cose da questo punto di vista, è possibile anche introdurre una orientazione per gli angoli. Infatti le due semirette con origine comune, che sono lati dell'angolo, determinano un piano nello spazio; tale piano può essere osservato da ognuno dei due semispazi che esso determina. Quando l'angolo sia associato ad un movimento di rotazione del piano su sé stesso, l'intuizione ci assicura che tale rotazione può essere vista accadere in due "versi" opposti: l'uno di essi è quello in cui ruotano abitualmente lancette degli orologi, e viene chiamato "verso" (o anche "senso") orario, o anche "verso negativo" di rotazione. Il verso opposto viene detto "antiorario" e viene convenzionalmente assunto come verso "positivo" di rotazione.

8 - Considerazioni conclusive.

Le poche riflessioni esposte sopra mostrano che il termine "angolo" può avere significati diversi, i quali hanno la loro origine in campi d'esperienza diversi tra loro; ma queste esperienze sono anche molto frequenti, per modo che, a livello elementare, sarebbe forse imprudente cercare di privilegiare un campo di esperienze a svantaggio degli altri. Forse a certe menti l'angolo può apparire un concetto molto chiaro, e quindi facile da definire e dominare matematicamente; ma ciò non è completamente vero, quando si voglia fare della matematica un insegnamento formativo; cioè un insegnamento che avvia all'impiego rigoroso del linguaggio e quindi abitua a diffidare dalle strutture linguistiche (frasi e discorsi in generale) quando si perda il loro significato concreto e si dimentichi il referente semantico.

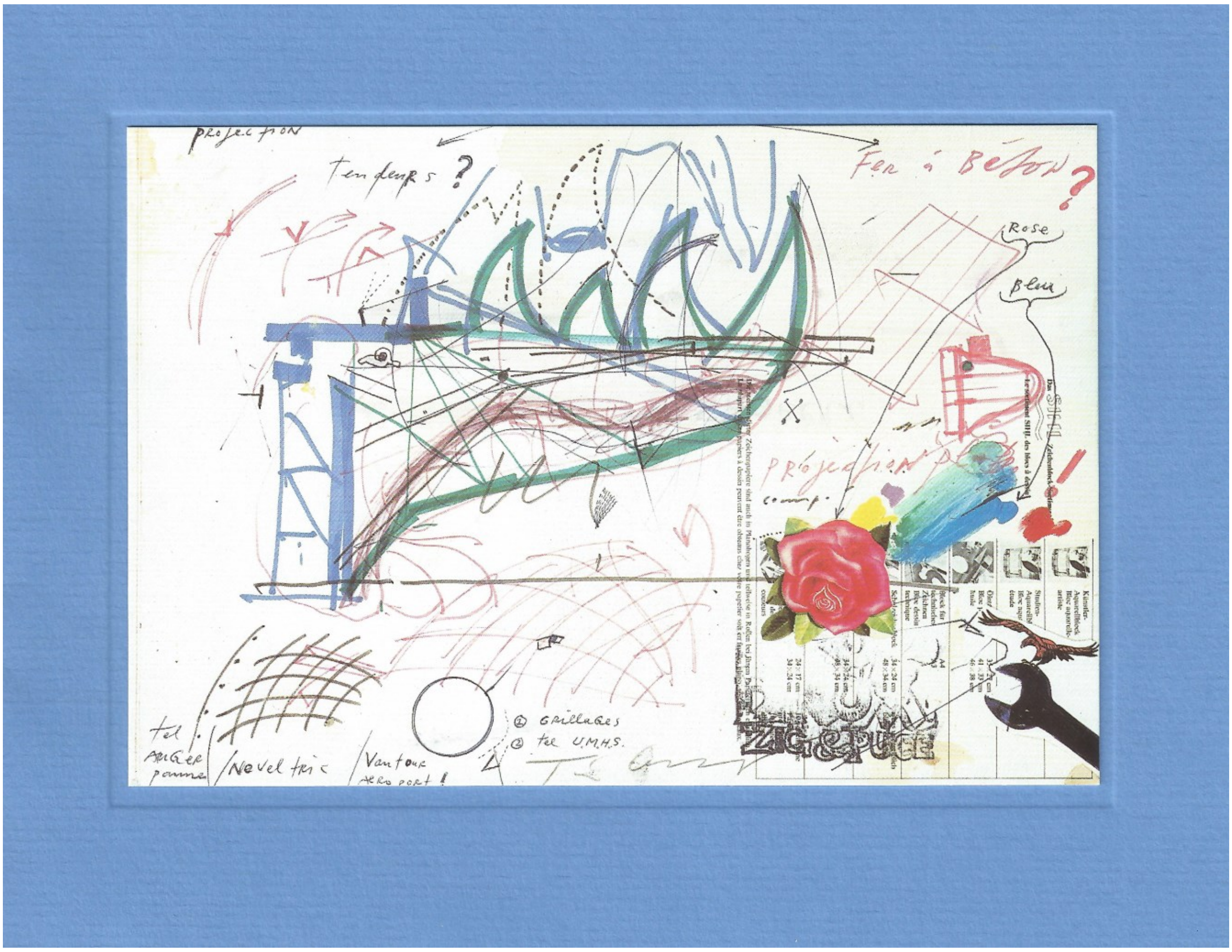
In particolare è da sconsigliarsi l'insistere nel verbalismo, inducendo i discenti a memorizzare e ripetere frasi del tipo: "Angolo è ... [questo o quest'altro]"; frasi che vorrebbero essere delle definizioni e che di solito non sono rigorose. Abbiamo infatti già visto (N.3) che questa procedura è stata adottata da Euclide, ma che oggi non viene considerata logicamente soddisfacente.

Forse una strada migliore sarebbe quella che conduce a prendere coscienza dei vari significati che l'uso comune conferisce al termine "angolo", ed a riflettere sui rapporti che intercedono tra i vari ambiti sperimentali da cui nascono i concetti.

Incontro del 27 giugno 1997 a Brescia.

Si discute della mia bozza sull'angolo. Alcune maestre hanno fatto una conversazione clinica sulla parola in classi seconde (6 -7 anni); appare abbastanza chiaro che il termine viene utilizzato soltanto nel senso di "regione angolare limitata”. Diversi ragazzi hanno osservato che "..l'angolo è necessario, altrimenti i muratori dovrebbero fare delle pareti infinite". Qualcuno è arrivato ad osservare l'esistenza di angoli concavi e convessi aventi gli stessi vertici [con espressioni "dentro, fuori", oppure "di qua, di là"]. Nessuno fa distinzione tra angolo piano e diedro, come pochissimi rilevano l'esistenza di angoli [diedri] che non abbiano spigoli verticali. Altri angoli rilevati sono quelli dei fogli, delle cornici, nel Crocefisso.

Pongo il problema di passare dal caso particolare dell'angolo retto, oggetto di esperienza immediata, al concetto di angolo come determinato da una coppia di semirette. La strada dovrebbe essere sempre quella di partire dal patrimonio di concetti e di termini già posseduti ed ampliare il campo semantico. 062897



Jean Tinguely. Studio per Crocrodrome. (1977).

L'angolo è un bel pasticcio….

BOZZA DI UNA MAPPA RELATIVA AL CONCETTO DI ANGOLO.

PREMESSA

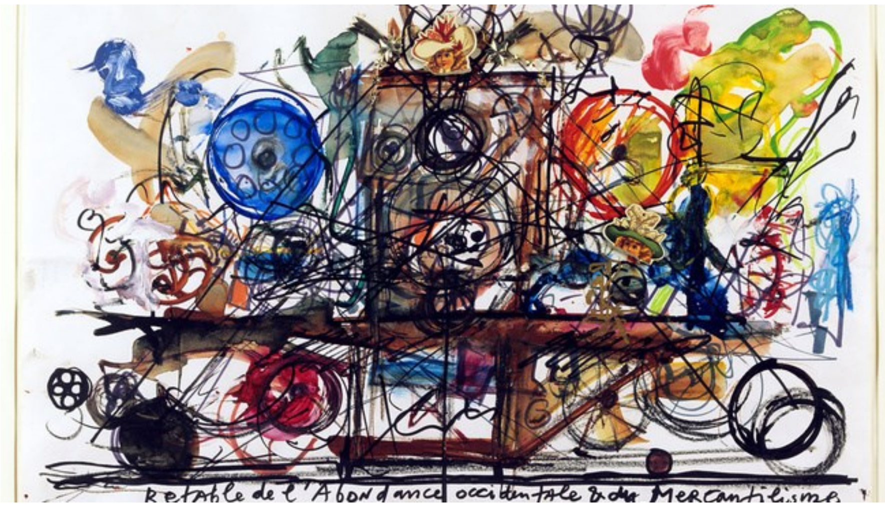
Il concetto di "angolo" ha la sua origine in esperienze diverse, anche se affini. Quindi il termine può avere significati diversi, ed il suo campo semantico si amplia progressivamente, con l'accrescersi del numero delle esperienze del soggetto e con il maturare a sua mente e l'ampliarsi del suo patrimonio linguistico.

Sarebbe quindi imprudente affidarsi all'apprendimento puramente mnemonico di una frase come quella classica di Euclide "Angolo è la mutua inclinazione di due rette", oppure a frasi analoghe.

La conversazione clinica ha mostrato che nel patrimonio linguistico abitualmente posseduto all'inizio della carriera scolastica si assegna al termine "angolo" il significato di "regione piana" avente una forma particolare; pertanto la bozza di mappa partirà da questa situazione concettuale, per estendere via via il significato del termine ad ambiti sempre più estesi, ma tra loro collegati.

Appunti dattiloscritti rieditati gennaio 2018.

Ndr. Si può vedere come referenza anche www.mat.uniroma2.it/mep/Articoli/Angolo/Ang.html



MAPPA : ANGOLO

i

2

Il concetto di ANGOLO nasce da osservazioni ed esperienze attinenti ad ambiti diversi, anche se affini. Pertanto il termine può assumere diversi significati.

Regione piana

Dalle conversazioni cliniche si apprende che il primo significato attribuito al termine "angolo" è quello di "regione piana limitata da due semirette aventi un'origine comune, in un punto chiamato "vertice".

La regione piana è ovviamente infinita (come le semirette) ma nel linguaggio abituale tale regione è immaginata limitata, e l'angolo delle due semirette è considerato quasi sempre retto (angolo di due pareti, angolo di una casa)

L'ultimo esempio mostra che la regione piana in parola è abitualmente immaginata come "convessa", tanto quando il soggetto parlante si trova all'interno della regione (angolo della classe, in cui una volta si confinavano i ragazzi irrequieti), quanto nel caso in cui il soggetto parlante si trova all'esterno (angolo di una casa, inteso come parte in qualche modo "sporgente")

Una prima riflessione conduce a considerare anche angoli diversi dagli angoli retti. Esempio il triangolo che può non essere rettangolo, e comunque possiede almeno due angoli acuti.

Angolo concavo

Una ulteriore riflessione può condurre a considerare angoli <u>concavi</u> ("rientranti" per così dire.

I modelli (in cartone o cartoncino) possono condurre ad una prima operazione di <u>confronto</u> tra regioni; e quindi a distinguere l'<u>ampiezza</u> dell'angolo dalla <u>estensione</u> del pezzo di piano, ovviamente finito, che si assume come modello materiale.

Coppia di semirette

Un secondo aspetto del concetto di angolo conduce a fissare l'attenzione sulla <u>coppia di semirette</u> aventi una origine comune. O anche sul l'insieme di semirette comprese tra due date. Modello: il <u>ventaglio</u>

Angolo di due direzioni

Questo modo di vedere si avvicina alla concezione classica (che ha origine in Euclide). E permette di dar senso al concetto di <u>angolo di due direzioni</u>. (per es. di due strade)

Somma e misura

Si può introdurre a questo punto il concetto di <u>misura</u> di un angolo attraverso la <u>somma</u> (ampliamento convenzionale) di due angoli acuti e la misura (pure convenzionale) dell'angolo retto con i gradi sessagesimali.

angolo piatto

Con una <u>estensione convenzionale</u> si dà senso al concetto di <u>angolo piatto</u> e angolo maggiore di un piatto. La somma degli angoli interni di un triangolo e poi di un poligono assume un nuovo significato.

angolo giro

Una ulteriore estensione concettuale conduce al concetto di <u>angolo giro</u> (ventaglietti di carta)

Rotazione

L'esperienza del <u>movimento di rotazione</u> (ruote, volani, lancette dell'orologio) induce alla introduzione di angoli <u>maggiori</u> di un angolo giro

Qui l'angolo si presenta come un parametro che individua (che indica – una misura) una <u>operazione</u>: la rotazione